**Группа МСХ-01. Тема 1.1. Рациональные уравнения и неравенства.**

Цели (образовательные): изучить методы решения уравнений и неравенств, содержащие модуль; рассмотреть различные примеры их применения.

**лекция**

**Модуль действительного числа и его свойства. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Модулем (абсолютной величиной) числа *а* называется само число *а*, если а ≥ 0, и число –*а*, если а < 0.

*Свойства:*

10. |*а*| ≥ 0..

20. |*а*–*b*| есть расстояние между точками *a* и *b* числовой оси; в частности, |*а*| равен расстоянию от точки *а* до точки 0 числовой оси (геометрический смысл модуля).

30. |–*а*| = |*а*|.

40. |*аb*| = |*а*|·|*b*|;  (*b*≠0).

50. |*а*|2 = *а*2 = |*а*2|.

60. 

70. 

80. 

90. 

100. , причем 

Из определения и свойств модуля вытекают основные методы решения уравнений и неравенств с модулем:

1. «раскрытие» модуля (т. е. использование определения);
2. использование геометрического смысла модуля (свойства 2);
3. использование равносильных преобразований (свойства 6-10);
4. замена переменной (при этом используется свойство 5).

Традиционным является «раскрытие» модуля (метод интервалов). Суть метода заключается в том, что числовая ось разбивается на несколько интервалов нулями функций, стоящих под знаком модуля в данном уравнении (неравенстве). На каждом из этих интервалов любая из указанных функций либо положительна, либо отрицательна. Поэтому каждый из модулей раскрывается либо со знаком плюс, либо со знаком минус. Таким образом, остается найти решение уравнения (неравенства) на каждом интервале и объединить эти решения.

**Пример 1.** Решить неравенство:



*Решение.*

*3x-2*

*x*

*x-1*

1

0



Рассмотрим четыре случая.

1. 

2. 

3. 

4. 

Объединим эти решения:

-1





1

*x*

*Ответ: .*

**Пример 2.** Решить уравнение:



*Решение.*

Пусть . Тогда уравнение примет вид . Воспользуемся геометрическим смыслом модуля: найдем все точки числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 0 и 4 равна 10.

-3

7

0

4





4

Очевидно, искомые точки лежат вне отрезка [0; 4]. Рассмотрим точку, лежащую левее точки 0 на оси. Пусть эта точка – искомая. Тогда сумма расстояний от нее до точек 0 и 4 складывается из длины отрезка [0; 4] и удвоенного расстояния до точки 0. Таким образом, расстояние от искомой точки до точки 0 равно . Поэтому искомой точкой является -3.

Очевидно, что вторая искомая точка – это точка 7. Итак,





*Ответ:* {–4; –2; 1; 3}.

Решением примера 2 методом интервалов оказалось бы значительно более громоздким. Вообще, использование геометрического смысла модуля является целесообразным при решении уравнений и неравенств, левая часть которых представляет собой сумму вида



(либо одно из слагаемых), а правая часть равна некоторому положительному числу.

Пример на применение свойства 5.

**Пример 3:** Решить уравнение:

.

*Решение:* Уравнение равносильно следующему:

.

Пусть , . Тогда , и уравнение примет вид:



Но , поэтому , откуда



*Ответ:* {1; 3}.

Свойство 5 целесообразно использовать при решении уравнений и неравенств вида .

Второй основной метод решения уравнений и неравенств с модулем заключается в использовании равносильных преобразований (свойства 6-10).

**Пример 4.** Решить уравнение (неравенство):

а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

*Решение:* а) Так как обе части неравенства неотрицательны, то возведение в квадрат является равносильным преобразование:







Решим последнее неравенство методом интервалов:

-3

3



*x*

*Ответ: *.

Были использованы свойства 5 и 9.

б) 

*Ответ:* {2; 6}.

в) 

Решим второе неравенство последней совокупности методом интервалов:

-1

0

*x*

1

Объединяя найденные решения с решением неравенства , получим ответ.

*Ответ:* .

г) 

(1)

(2)

Решим (1) методом интервалов:

-2



*x*

2

Решим (2) методом интервалов:

-2



*x*

2

0

Найдем пересечение решений:

-2



*x*

2

0



*Ответ:* .

д) Перепишем уравнение (так как ):

.

Из свойства 10:

.

Тогда уравнение равносильно неравенству:





.

Метод интервалов дает:



*x*

1



*Ответ: *.

В примере 4 а-г применение метода интервалов привело бы к существенно сложным и громоздким выкладкам. Какой из двух основных методов предпочтительнее, зависит от вида уравнения (неравенства). Метод интервалов наиболее рационален при решении уравнений и неравенств с модулем, содержащих более одного знака абсолютной величины, если под знаками модуля находятся линейные функции. Если же функция под знаком модуля более сложная (например, квадратный трехчлен), то, скорее всего, более рационально использование равносильных преобразований.

**ЗАДАНИЯ:**

*-выполнить конспект урока;*

*-самостоятельная работа:*

**№1.**Решите уравнение (неравенство): а)  б) 

**№2**.Решите уравнение (неравенство):

а) 

б) 

**№3**.Решите уравнение, используя геометрический смысл модуля:

а) 

б) 

==========================================

*Ответы для самоконтроля:*

1. а) ; б) ;

2. а) ; б) ;

3. а) ; б) ;